УДК 517.911, 517.968

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ. Часть 2

©А.И. Булгаков, Е.В. Корчагина, О.В. Филиппова

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; импульсные воздействия; выпуклость по переключению значений (разложимость).

Рассмотрены вопросы продолжаемости решений функционально-дифференциального включения с полунепрерывной сверху правой частью и импульсными воздействиями.

Рассмотрим задачу Коши для функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями, которая определена в части 1

$$\dot{x} \in \Phi(x), \tag{1}$$

$$\Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k)),\ k = 1, ..., m, \tag{2}$$

$$x(a) = x_0, \tag{3}$$

В этой части будем считать, что правая часть включения (1) имеет *выпуклые*, *выпуклые по переключению* и *ограниченные значения* в пространстве суммируемых функций, а сам оператор, порождаемый включением 1, *вольтерров полунепрерывен сверху и переводит каждое ограниченное множество пространства кусочно непрерывных функций в множество, ограниченное суммируемой функцией.* Здесь исследование проводится не на основе существования непрерывной ветви у полунепрерывного снизу многозначного отображения, как в части 1, а на основе теоремы Какутани (см. [5]).

Л е м м а 1. Отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega[S(\mathbf{L}_1^n[a,b])]$ замкнуто в слабой топологии пространства $\mathbf{L}_1^n[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_i \to x$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $q_i (\in \Phi(x_i)) \to q$ слабо в пространстве $\mathbf{L}_1^n[a,b]$ при $i \to \infty$. Покажем, что $q \in \Phi(x)$. Так как $q_i \to q$ слабо в $\mathbf{L}_1^n[a,b]$, то для каждого $i = 1, 2, \ldots$ найдутся такие числа $m(i)$, $\lambda_j^i \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots m(i)$, что $\sum\limits_{j=1}^{m(i)} \lambda_j^i = 1$ и последовательность

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{m(i)} \lambda_j^i q_{j+i} \tag{4}$$

сходится к q в пространстве $\mathbf{L}_1^n[a,b]$ (см. [2]). Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно полунепрерывности сверху отображения $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega[S(\mathbf{L}_1^n[a,b])]$, найдется такой номер I, что при всех $i \geqslant I$ выполняется вложение

$$\Phi(x_i) \subset (\Phi(x))^{\varepsilon}. \tag{5}$$

Так как $q_i \in \Phi(x_i)$, то из вложения (5) следует, что для любого $i \geqslant I$ $q_i \in \overline{(\Phi(x))^{\varepsilon}}$. Так как $\Phi(x)$ выпукло, то множество $(\Phi(x))^{\varepsilon}$ также выпукло. Отсюда следует, что для любого $i \geqslant I$

β_i, определенное равенством (4), принадлежит множеству $(\Phi(x))^{\varepsilon}$. Поэтому $q \in \overline{(\Phi(x))^{\varepsilon}}$, так как $\varepsilon > 0$ – произвольное число, то из замкнутости множества $\Phi(x)$ следует, что

$$q \in \Phi(x).$$

Лемма доказана.

Определим отображение $\widetilde{\mathfrak{A}} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega[\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]]$ равенством

$$\widetilde{\mathfrak{A}}(x) = \Lambda\Phi(x), \tag{6}$$

где непрерывный оператор $\Lambda : \mathbf{L}_1^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ имеет вид

$$(\Lambda z)(t) = x_0 + \int\limits_a^t z(s)ds, \quad t \in [a,b]. \tag{7}$$

Л е м м а 2. *Оператор* $\widetilde{\mathfrak{A}} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega[\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]]$, *определенный равенством* (6), *замкнут в пространстве* $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, согласно определению отображения $\widetilde{\mathfrak{A}} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega[\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]]$ для каждого $y_i \in \widetilde{\mathfrak{A}}(x_i)$, $i = 1,2,\dots,$ найдется такое $z_i \in \Phi(x_i)$, что выполняется равенство

$$y_i = \Lambda z_i.$$

Так как последовательность z_i, $i = 1,2,\dots,$ ограничена суммируемой функцией, то не уменьшая общности можно считать, что $z_i \to z$ слабо в пространстве $\mathbf{L}_1^n[a,b]$ при $i \to \infty$. Поэтому $y = \Lambda z$. В силу леммы 1 $z \in \Phi(x)$, а это означает, что $y \in \widetilde{\mathfrak{A}}(x)$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Так как сумма скачков является непрерывным оператором, то оператор $\mathfrak{A} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega[\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]]$, определенный равенством

$$(\mathfrak{A}x)(t) = \widetilde{\mathfrak{A}}(x) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{8}$$

является замкнутым.

Используя теорему Какутани (см. [5]), аналогично доказательствам теорем 1–4 части 1, доказываются следующие утверждения.

Т е о р е м а 1. *Найдется такое* $\tau \in (a,b]$, *что решение задачи* (1)-(3) *существует на отрезке* $[a,\tau]$.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы решение* $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ *задачи* (1)-(3) *было продолжаемым на некоторый отрезок* $[a,\tau]$ $(\tau \in [c,b])$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\overline{\lim\limits_{t\to c-0}}\ |x(t)| < \infty$.

Т е о р е м а 3. *Если* x — *решение задачи* (1)-(3) *на* $[a,\tau]$, $\tau \in (a,b]$, *то существует непродолжаемое решение* y *задачи* (1)-(3) *либо на* $[a,c)$ $(c \in (\tau,b])$, *либо на* $[a,b]$ *такое, что при* $t \in [a,\tau]$ *выполнено равенство* $y(t) = x(t)$.

Т е о р е м а 4. *Если множество всех локальных решений задачи* (1)-(3) *априорно ограничено, то существует такой выпуклый компакт* $K \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, что $H(x_0,b) \subset K$, $\mathfrak{A}(K) \subset K$, *где отображение* $\mathfrak{A} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \Omega[\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]]$ *задано равенством* (8), *и для любого* $\tau \in (a,b)$ *выполняется равенство* $H(x_0,\tau) = H(x_0,b)|_{[a,\tau]}$.

Из леммы 2 и замечания к ней вытекает

Т е о р е м а 5. *Для любого* $\tau \in (a,b]$ *множество* $H(x_0,\tau)$ *замкнуто.*

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим $H(M,b) = \bigcup\limits_{x\in M} H(x,b)$. Пусть $\mathfrak{H}(x_0)$ – множество всех непродолжаемых решений задачи (1)-(3). Согласно теоремам 1, 3, непродолжаемое решение

$y \in \mathfrak{H}(x_0)$ определено либо на некотором интервале $[a,c) \subset [a,b]$ $(c \in (a,b])$, либо на отрезке $[a,b]$, причем, если $y \in \mathfrak{H}(x_0)$ определено на $[a,c)$, то, согласно теореме 2, имеет место соотношение $\overline{\lim\limits_{t\to c-0}}\ |y(t)| = \infty$. Далее, обозначим $\mathfrak{H}(M) = \bigcup\limits_{x\in M} \mathfrak{H}(x)$.

Аналогично определению априорной ограниченности решений задачи (1)-(3), определим априорную ограниченность решений задачи (1)-(3) в случае, когда начальные условия (3) принадлежат множеству $M \subset \mathbb{R}^n$. При этом будем говорить, что задача (1)-(3) априорна ограничена на множестве M.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим

$$|M| = \sup_{x\in M} |x|.$$

Пусть $m > 0$. Тогда для каждого решения $y \in \mathfrak{H}(M)$, у которого $|y(a)| < m$, определим число

$$\tau(y,m) = \sup\{d \in (a,b] : \forall\ t \in [a,d] \ \ |y(t)| \leqslant m\},$$

и функцию $y|_{[a,\tau(y,m)]}$, являющуюся сужением функции $y \in \mathfrak{H}(M)$ на отрезок $[a,\tau(y,m)]$. Далее, для каждого числа m и множества $M \subset \mathbb{R}^n$ определим множество

$$\mathfrak{H}(M,m) = \{y|_{[a,\tau(y,m)]} : y \in \mathfrak{H}(M)\}.$$

Множество $\mathfrak{H}(M,m)$ может быть и пустым, если число $m < |x|$, для любого $x \in M$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что *множество* $\mathfrak{H}(M,m)$ *равностепенно непрерывно*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $k = 0,1,\ldots,m$ и любых $t_1, t_2 \in (t_k, t_{k+1}) \bigcap [a,\tau(y,m)] \neq \varnothing$, удовлетворяющих неравенству $|t_1 - t_2| < \delta$, выполняется неравенство

$$|y(t_1) - y(t_2)| < \varepsilon$$

для любого $y \in \mathfrak{H}(M,m)$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное множество. Будем говорить, что *множество всех непродолжаемых решений задачи* (1)-(3) *на множестве* M ($\mathfrak{H}(M)$) *равностепенно непрерывно*, если для любого $m > |M|$ множество $\mathfrak{H}(M,m)$ равностепенно непрерывно.

Л е м м а 3. *Для каждого ограниченного множества* $M \subset \mathbb{R}^n$ *множество всех непродолжаемых решений задачи* (1)-(3) *на множестве* M *равностепенно непрерывно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m > |M|$. Тогда множество

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{H}(M,m)) = \bigcup_{y|_{[a,\tau(y,m)]}\in\mathfrak{H}(M,m)} V_{\tau(y,m)}(y|_{[a,\tau(y,m)]}) \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \tag{9}$$

ограничено, согласно определению отображения $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ (см.(5)). Поэтому образ $\Phi(\mathfrak{V}(\mathfrak{H}(M,m)))$ ограничен суммируемой функцией, а так как все «производные решения» (функции $q \in \mathbf{L}_1^n[a,\tau]$ в представлении решения на отрезке $[a,\tau]$ (см. (6))) принадлежат этому образу, то они ограничены одной и той же суммируемой функцией на соответствующем промежутке, на котором определено это решение. Так как «скачки» решения не нарушают равностепенной непрерывности на соответствующем промежутке $(t_k, t_{k+1}) \bigcap [a,\tau(y,m)] \neq \varnothing$, $k = 1,2,\ldots,m$, $y|_{[a,\tau(y,m)]} \in \mathfrak{H}(M,m)$, то множество $\mathfrak{H}(M,m)$ равностепенно непрерывно. Лемма доказана.

Т е о р е м а 6. *Если задача* (1)-(3) *априорно ограничена, то найдется такое* $\delta > 0$, *что задача* (1)-(3) *априорно ограничена на шаре* $B[x_0,\delta]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда найдется такая последовательность $x_i \to x_0$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ при $i \to \infty$, для которой при каждом $i = 1,2,\ldots$

найдется $\tau_i \in (a,b]$ и $y_i \in H(x_i,\tau_i)$, что

$$|y_i(\tau_i)| > d + i, \tag{10}$$

где $d > 0$ некоторая константа. Продолжим решение $y_i \in H(x_i,\tau_i)$ до непродолжаемого решения. Это продолжение обозначим $y_i^* \in \mathfrak{H}(x_i)$. Пусть $\tau_i^* \in (a,b]$ – правый конец интервала, на котором определено решение $y_i^* \in \mathfrak{H}(x_i)$. Пусть $\tau^* = \varliminf\limits_{i\to\infty} \tau_i^*$. Далее, не уменьшая общности считаем, что $\tau^* = \lim\limits_{i\to\infty} \tau_i^*$. Очевидно, что $\tau^* \in (a,b]$. Кроме того, из определения числа τ^* следует, что для любого числа $\beta \in (0,\tau^*-a)$ бесконечное множество функций $y_i^* \in \mathfrak{H}(x_i)$, $i = 1,2,\ldots$ ограничены на отрезке $[a,a+\beta]$ и сужения этих функций на отрезок $[a,a+\beta]$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,a+\beta]$ ограничены. Не уменьшая общности, будем считать, что вся последовательность $y_i^* \in \mathfrak{H}(x_i)$, $i = 1,2,\ldots$ ограничена на любом отрезке $[a,a+\beta]$ ($\beta \in (0,\tau^*-a)$). Из оценки (10) следует, что найдется такая последовательность $d_i \in (a,\tau^*)$, $i = 1,2,\ldots$, что $d_i \to \tau^*$ и $\lim\limits_{i\to\infty} |y_i(d_i)| = \infty$. Так как, согласно лемме 3, множество функций $y_i^* \in \mathfrak{H}(x_i)$, $i = 1,2,\ldots$ равностепенно непрерывно на любом отрезке $[a,a+\beta]$ ($\beta \in (0,\tau^*-a)$), то известным диагональным процессом можно выделить из последовательности $y_i^* \in \mathfrak{H}(x_i)$, $i = 1,2,\ldots$ сходящуюся на каждом отрезке $[a,a+\beta]$ ($\beta \in (0,\tau^*-a)$) подпоследовательность. Не уменьшая общности, будем считать, что сама последовательность $y_i^* \in \mathfrak{H}(x_i)$ сходится на каждом из этих отрезков. Пусть $y^* : [a,\tau^*) \to \mathbb{R}^n$ – предел этой последовательности. В силу того, что оператор $\mathfrak{A} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega[\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]]$, определенный равенством (8), замкнут (см. лемму 2 и замечание к ней), то любое сужение функции $y^* : [a,\tau^*) \to \mathbb{R}^n$ на отрезок $[a,a+\beta]$ ($\beta \in (0,\tau^*-a)$) – решение задачи (1)-(3) на отрезке $[a,a+\beta]$. Далее, покажем, что

$$\lim_{t\to\tau^*-0} |y^*(t)| = \infty. \tag{11}$$

Предположим противное. Тогда функция $y^* : [a,\tau^*) \to \mathbb{R}^n$ ограничена на $[a,\tau^*)$. Пусть для любого $t \in [a,\tau^*)$ $|y^*(t)| < k$. Зафиксируем $m > k$. Тогда, в силу равностепенной непрерывности множества $\mathfrak{H}(M,m)$ (см. (9)), где $M = \{x_i, i = 1,2,\ldots\}$, для положительного числа $m-k$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любого $y \in \mathfrak{H}(M,m)$ и любых t_1,t_2 принадлежащих соответствующим интервалам, выполняется неравенство $|y(t_1)-y(t_2)| < m-k$. Не уменьшая общности, будем считать, что все $d_i \in (\tau^*-\delta,\tau^*)$ и $|y_i(d_i)| > m$. Выберем I столь большим, что для любого $i > I$ и любого $t \in [a,d_1]$ выполняется $|y_i(t)| < k$. Так как $|y_i(d_i)| > m$, то имеет место неравенство

$$|y_i(d_1) - y_i(d_i)| \geqslant m - k,$$

но это противоречит выбору числа δ. Таким образом, равенство (11) доказано, но это противоречит априорной ограниченности задачи (1)-(3). Поэтому утверждение теоремы справедливо. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгаков А.И., Беляева О.П., Мачина А.Н.* Функционально-дифференциальные включения с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестн. Удм. ун-та. Матем., механика. 2005. № 1. С. 3-20.

2. *Булгаков А. И.* Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 3. С. 371-379.

3. *Тихонов А. Н.* Функциональные уравнения типа Вольтерра и их приложения к некоторым вопросам математической физики // Бюл. Моск. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 68. № 4. С. 1-25.

4. *Bressan A., Colombo G.* Extensions and selections of maps with decomposable values // Studia. math. 1988. V. 90. № 1. P. 69–86.

5.*Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

6. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1987.

7. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.

8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. К.: Вища шк., 1987.

9. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces, Walter de Gruyter. Berlin; New-York, 2001.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты № 07-01-00305, № 09-01-97503), Министерства образования и науки РФ (программа Развитие научного потенциала высшей школы, проект № 2.1.1/1131), Норвежской Национальной Программы Научных Исследований FUGE (грант PRO 06/02) при Совете научных исследований Норвегии и Норвежского Комитета по развитию университетской науки и образования(NUFU).

Поступила в редакцию 10 апреля 2009 г.

Bulgakov A.I., Korchagina E.V., Filippova O.V. Functional-differential inclusions with impulses. Part 2. There are considered the questions of extendability of solutions to functional-differential inclusions with upper semicontinuous right-hand side and with impulses.

Key words: functional-differential inclusion; impulses; convex-valued with respect to switching.